# メタ言語概念の誕生とその論理的根拠について

藤田 裕二*

## 1 はじめに

本稿のテーマは、メタ言語概念誕生の歴史的な過程と、そのなかで置き去りにされていた、メタ言語使用に関する論理的根拠である。

現代の論理学において「メタ言語」とは形式的体系を記述するために用いた表現を、体系そのもの(一般に、メタ言語に対して対象言語と呼ばれる) から区別する時に用いられる用語である。メタ言語に属する表現を、それによって記述された体系そのものと区別するということは、現代の論理学においては一般的であり、かつ、重要な原則となっている。

この原則の正当性は、数々のメタ定理が論理学に存在し、それらが論理学の主要な成果を構成していることからすれば自明であり、議論に値しないかのように思われる。

本稿の論点の一つは、歴史的に見れば、この原則は決して自明なものであるとして片付けることはできないということを明らかにすることである。

しかし、メタ言語/対象言語の区別の必要性が気づかれてからは、メタ言語 構築が論理学の主な課題の一つとなった。その結果、重要なメタ定理が証明されるに至っている。

しかし、それらメタ定理の存在をもって、それがメタ言語と対象言語を区別するという原則に論理的必然性を与えるものであるとすることはできない。むしろ、論理的順序からいえば、メタ言語/対象言語の区別という原則を立てた時点で、メタ言語が無い場合には、如何なる論理的事態が生ずるかという考察が必要だった。しかしこれは現時点まで見過ごされて来たのである。本稿のもう一つのテーマは、メタ言語の使用に関する論理的な根拠となる、ある定理の概略である。

本稿ではまず、メタ言語の概念が形成され、形式的体系を構築する際にメタ言語を、体系そのものから区別するという原則が成立して行く過程を検証する。これによって、今では自明とされているメタ言語と対象言語の区別が明白に認識されるためには、相当の時間と研究が必要だったということを明らかにする。つぎに、その論理的根拠の一部をなす定理の概略を述べる。

## 2 メタ言語概念の誕生

メタ言語は、現代論理学に最初からあった概念ではない。現在、標準的と見なされている、「一階述語論理」と呼ばれる体系は、その完成された姿としての直接の起源を *PRINCIPIA MATHEMATICA* に求める事ができる。

注目すべき事は、形式的体系そのものは、PM でほぼ完成しているにもかかわらず、本稿のテーマである「メタ言語」の概念はこの時点で未だ明瞭なものとなっていない、ということである。一階述語論理そのもののが完成しても、メタ言語と対象言語の境界は、曖昧なままなのである。

*東京工業大学社会理工学研究科技術構造分析

この曖昧さを、きわめて真剣に受け止めていた一人に *StanislawLesniewski* がいる。彼の著作 "On the Foundations of Mathematics [1]" は「クラス」という概念を形式化したシステム "Mereology" を公表することを目的として書かれたものである。この著作はシステムの構築の経緯を自伝的に紹介するというスタイルを取っており、そのスタイル故に全3章のうちの、第1章が、まさに本稿の一つめのテーマであるメタ言語概念の形成過程において、中心的な位置を占めているのである。

> The decidedly sceptical dominant note of the position I occupied for a number of years in relation to 'symbolic logic', stemmed from the fact that I was not able to become conscious of the real 'sense' of the axioms and theorems of that theory, - 'of what' and 'what' respectively, it was desired to 'assert' by means of the axioms and theorems. [2]

Lesniewski は、"On the Foundations of Mathematics." の中でPM の記号 "⊢" の使い方を例に挙げて、記号列 "⊢ $p$" が、命題 $p$ が肯定されるという意味なのか(この場合は、記号 "⊢" は命題の一部ではない)、あるいは、体系の中で肯定される命題は全て "⊢ $p$" という形をしており、記号 "⊢" は命題の一部なのかが判らないとしている。[3]

今日の、メタ言語と対象言語の区別に親しんでいる立場からすれば、肯定するという用語を「真である」と捉えるならば、記号 "⊢" は典型的なメタ言語に属する表現であり、命題の一部ではありえないのである。しかし、少なくとも PM が出た 1914年当時で、こういった曖昧さを真剣に受け止めていた人はほとんど居なかったということは、やや意外に思える。

最終的に Lesniewski は PM に出現する記号 "⊢" の解釈には次の3通りの可能性があると分析している。

1. 記号 "⊢" は命題の一部であり、"⊢ .$p$" は "$p$ を肯定する" という意味である。

2. 記号 "⊢" は命題の一部ではない。"⊢" は "以下を肯定する" という意味である。従って、$p$ が命題である場合は "⊢ .$p$" は意味のある表現であるが、それ自体は命題ではない。

3. "$p$" が命題の時、"$p$" と "⊢ .$p$" は共に命題であり、かつ、全く同じ意味を持つ。"⊢" は、著者がそれに続く命題を肯定したいのか、そうでないのかを表明するのに使われる。したがって、公理は全て "⊢ .$p$" という形式でなくてはならない。

解釈1は、今日の論理学で言えば、"⊢" を一種の様相記号とするものであり、2はメタ言語 "以下を肯定する" の省略記法にあたる。

これらの解釈は、未だ「メタ言語」という概念として、一般化こそされていないが、現在一般的に行われているメタ言語と対象言語の区別の、Lesniewski による素描といえるものである[4]。

その後メタ言語概念は Gödel や、Lesniewski の学生であった Tarski らによって発展させられた。例えば、Tarski の "The Concept of Truth in Formalized Languages" [5] などの成果は、メタ言語自体が研究対象となった、もっとも初期の業績の一つである。ここに至って、形式言語の構築あるいは研究に際しては、メタ言語と対象言語の区別を明瞭に行わなければならない事が、ようやく明確に認識されるようになるのである。

[1] L esniewski On the Foundations of Mathematics

[2] On the Foundations of Mathematics PP.181-182

[3] On the Foundations of Mathematics P.P.182-183

[4] 実際の結果は全て出揃っていたにもかかわらず、Lesniewski には、ここで扱っている文献 On the Foundations of Mathematics. の発表までにはかなりの逡巡があった。1916年に、第3章と同じタイトルの著作があり、かつ、On the Foundations of Mathematics が "自伝的" なスタイルで書かれているということ、さらに、PM に存在するメタ言語の使い方の不正確さを挙げるにあたって「少し考えれば、すぐに、おかしい事に気づくはずだ」といった調子で書かれている事を考えると、Lesniewski が実際に「メタ言語」の必要性に気づくまでは、PM 第1巻が出版された 1910年からそう長くはかからなかったものと思われる。

[5] 1931, German translation 1936

> For this reason, when we investigate the language of a formalized deductive science, we must always distinguish clearly between the language *about* which we speak and the language *in* which we speak, as well as between the science which is the object of our investigation and the science in which the investigation is carried out. The names of the expressions of the first language, and the relations between them, belong to the second language, called the *metalanguage* (which may contain the first as a part). [6]

このように、1910年代から1930年代はじめにかけて、多くの研究がなされたことで、ようやくメタ言語と対象言語の区別の必要性が認められるようになるのであるが、しかし、その後の論理学者達の興味の中心は、メタ言語に関する限り、専らメタ言語構築、あるいはその性質の研究に移ってしまう。そして、メタ言語を用いない場合には、どのような論理的困難が生じるのかということは問題にされないまま、現在に至っているのである。

## 3 well-fromed formula 概念の、体系内部における定義不可能性

このような、歴史的な事情と現在の状況を踏まえるならば、また、論理的な順序からいって、メタ言語の必要性に関する論理学的研究がなされる必要があると言える。ここでは、次のような私の定理を簡単に紹介し、メタ言語使用に関するその論理的根拠の一部を構築する事にしたい。

**定理 1** メタ言語の使用に関して、対象となる言語を指示する要素の使用を禁ずるという制限を設けた場合には、*well-formed formula* の概念を定義することが不可能である。

定理1は、概略次のようにして証明される。

一般的な形式的体系が持つ原始記号の有限列に関して、原始記号のうちに、ある範疇(論理記号とその他を意図した分類である)を導入することにより、"部分列" を定義する。

まず、記号列の論理記号による連結操作に関して、閉じている極小集合 $W$(well-formed formula の集合を意図したもの)の要素の部分列は、やはり $W$ の要素になるという補題を証明する。

この補題から、$W$ が有限列全体の真部分集合であり、かつ、補題の条件を満たす原始記号の集合であった場合は、任意の記号列を、その部分式として持つような記号列は、$W$ の要素ではあり得ないという定理が証明される。

well-formed formula の集合は、上の定理の条件を満たすものである。対象となる言語を指示する要素を一切使用しないという条件と、先の定理から、well-formed formula の集合を体系内部で定義できないという定理が証明される。

なお、証明の中で用いる記号列に関する条件は、通常の形式的体系が持つものよりも弱くて、一般化されたものとなっている。例えば、通常の形式的体系では論理式の部分式への分解は一意的であり、それを保証するために "(" や ")" が用いられるが、そのような仕組みを仮定せずとも先に述べた補題及び定理が証明できる。

メタ言語にとって、対象となる言語を指示する要素は本質的である。一方、明らかに論理式として不適当な記号列が存在するので、可能な原始記号の並びのうち、論理式として適切なものを規定する必要がある。それゆえ定理1から、対象となる言語を指示する要素(すなわち、それはメタ言語である)が必要であるという結論が得られる。

[6] Tarski 'Concept of Truth in Formalized Languages' P.167

# 参考文献

Lesniewski, S. 'O podstawach matematyki, Westep. Rozdzial 1 : O pewnyeh kwestjach, dotyczacy sensu tez 'logistyznych' .' Przeglaqd Filozoficzny 30 (1927),PP. 164-206.
English transation by D. I. Barnett. as 'On the Foundations of Mathematics' Stanislaw Lesniewski Collected works vol.1 PP. 174-382. edited by Stanislaw J. Surma Jan T. Srzednicki D.I. Barnett with an Annotated Bibliography by V.Frederick Rickey Kluwer Academic Publishers 1992

Whitehead, A.N. Russell, B. 'PRINCIPIA MATHEMATICA' second edition, Cambridge University Press 1960.

Taski, A. 'O ugruntowaniu naukowej semantyki' in *Przeglad Filozojiczny*, vol. 39 (1936), pp. 50-57. English translation by Woodger J.H. as 'The Establishment of Scientific Semantics' in Logic, Semantics Metamathematics, PP.401-408, Clarendon press, Oxford, 1969.

Gödel, K. 'On formally undecidable propositions of *Principia mathetica* and related systems I' Kurt Gödel COLLECTED WORKS volume I, ed. Feferman, S., Oxford.